

# Mathématique à l'école : codage et décodage

## l'apport des réglettes Cuisenaire

Jacques Delacour

En communication écrite, tout est normalement organisé pour distinguer codage et décodage. D'une part on apprend à coder l'oral en écrit, en associant mentalement à des sons-sens des graphies orthographiques, d'autre part on parvient à décoder, soit en retrouvant en mémoire quels sons-sens ont été codés avec les différentes graphies, soit en reconnaissant directement les mots<sup>1</sup>.

En mathématique, on ne retrouve pas cette franche dichotomie entre codage et décodage. Il n'y a pas d'instruction officielle précise concernant l'enseignement scindé des spécificités du codage et du décodage des quantités. On le comprend aisément, puisque le codage des quantités est parfaitement biunivoque, un signe évoquant toujours et uniquement la même quantité. Où en serait-on, si, à l'image de l'écriture-lecture, un signe, 1 par exemple, codait tantôt 1 objet puis 5 objets puis 8 objets suivant la bonne volonté du codeur<sup>2</sup>. En écriture c'est une situation courante, « c » par exemple est utilisé pour coder /c/ (car), /ch/ (char), /s/ (ceci), /ch/ (fascisme), /g/ (second) ; « t » code aussi bien /t/ que /s/, etc. Autant le décodage d'un chiffre est certain, autant celui d'une lettre ou d'un groupe de lettres est incertain.

Il faut pourtant bien convenir que le langage mathématique prend naissance, comme toutes les communications symboliques, à travers un choix du code au moment du codage, jamais au décodage. Et si on code du sens, encore faut-il avoir accès au sens. Et le signe 3, pas plus que la lettre « a » avant codage, n'est pourvu d'un sens intrinsèque, il est le symbole, arbitrairement choisi, pour coder toutes les collections d'objets comportant trois éléments en base décimale. Les Romains codaient cette quantité avec III. 3 (un chiffre) est une image mentale du concept 3 autant que /trois/ oral ou « trois » écrit ou la couleur vert clair comme nous le verrons

---

<sup>1</sup> On sait que cette reconnaissance n'est pas « globale » au sens de lecture globale.

<sup>2</sup> On pourra objecter que 1, en numération positionnelle, ne code pas toujours 1, on verra cela. Mais plus certainement lorsque 3 sera remplacé par le code 10 en base 3, les difficultés surviendront si on n'a pas bien conceptualisé codage et décodage mathématique.

plus loin. Tous ces codes n'ont qu'un pouvoir évocateur au sein du codage mémorisé. En retour, en mémoire du codage, ils donnent accès au concept codé.

## **Sans concept, pas de codage !**

En conséquence, il faut prioritairement installer le concept de quantité (le sens), lui donner une consistance mentale solide, si on veut être en mesure de pouvoir le coder. Pas de concept du nombre, pas de codage possible. Inutile donc de réciter la suite des nombres/chiffres en croyant assurer un codage, on récite seulement une comptine<sup>1</sup> invitant d'ailleurs plus à l'ordinal qu'au cardinal. Ensuite il faudra apprendre comment chaque collection va être nommée, de la plus petite à la plus grande, sans jamais confondre cardinal et ordinal (3 et troisième). Donc comprendre l'itération de l'unité et les nombreux rapports que peuvent entretenir entre elles toutes ces quantités. Il faudra également observer et parfois créer des situations opérationnelles (addition, soustraction, etc.) pour parvenir à leur conceptualisation, pour calculer et parfois mémoriser les valeurs résultant de ces « jeux » mathématiques.

## **Conceptualisation de la notion de nombre**

En maternelle et au CP il est possible de conduire chacun à la conceptualisation du nombre sans même utiliser un chiffre oral ou écrit. Compte tenu des observations de Piaget qui a mis à jour les conceptions primitives erronées des comparaisons de quantités (confusion entre l'espace et la quantité), le premier travail consistera à constituer des collections égales diverses, à les comparer entre elles, à les classer<sup>2</sup>. Sans forcément respecter l'ordre numéral : il est facile de constituer une collection équivalente aux doigts d'une main par exemple. Puis de comparer (plus grand, plus petite ou égal) des collections différentes qu'on aura réalisées effectivement. Et en cela le cerveau humain est spécialiste, c'est une partie importante de ses capacités, dont une application homothétique se retrouve dans les calculatrices ou les ordinateurs (pas de cerveau, pas d'ordinateur !).

Par exemple deux collections de jetons numériquement différentes mais physiquement identiques à la couleur près, sont fournies à l'enfant et il doit trouver celle qui contient le plus de jetons (ou le moins). Progressivement il utilisera systématiquement la correspondance terme à terme. En multipliant les expériences, la partie commune à toutes les manipulations permettant la comparaison s'installera : la mise en correspondance terme à terme. On pourra alors coder (écrire au sens premier) les résultats constatés visuellement : Si R désigne (code) la collection rouge, et V la collection verte, on pourra écrire suivant les cas de figure :  $R = V$  et/ou  $V = R$  ;  $R < V$  et/ou  $V > R$  ;  $V < R$  et/ou  $R > V$ . L'écriture-codage sera facilitée au début avec des cartons comportant R, V, =, >, <.

---

<sup>1</sup> Comme lorsqu'on récite l'alphabet en écrit.

<sup>2</sup> En écrit comme en mathématique, les psychologues ont inventorié les façons dont les enfants organisaient leur développement mental. On ne peut pas attendre qu'ils apprennent à lire ou compter en vieillissant. Par contre la connaissance des sentiers utilisés par les enfants permet de les garder plus sûrement sur la bonne route.

On pourra compléter cette approche en collectionnant dans une même boîte symbolisant l'égalité cardinale de chaque collection, des sacs transparents réunissant des collections de 2, 1, 4 ou 3 objets. Les boîtes seront reconnaissables grâce à un codage particulier : la figure du dé à jouer correspondant (de 1 à 6) ou tout autre code, comme une des réglettes Cuisenaire, voire par la suite, le chiffre servant à coder le nombre en base 10. Chaque enfant apportant une nouvelle collection devra trouver la bonne boîte où la ranger. On créera des boîtes nouvelles pour les collections encore non répertoriées. On pourra assister à des discussions sur l'admission d'une collection comportant un bouton, un papier et une photo dans la boîte 3... 3 boutons, d'accord mais un mélange hétéroclite ?

Moyennant quoi, en fournissant deux collections de jetons égales ( $R = V$  à vérifier !) on peut demander à ce que la collection  $R$  devienne plus grande que la  $V$ , ou inversement. Et il y a déjà 2 manipulations possibles, agrandir  $R$  ou diminuer  $V$ . On pourra imposer la collection devant grandir en l'indiquant avec une écriture :  $R > V$ . On impose une action manuelle additive. On écrit l'action réalisée et son résultat :

$$R + rr > V,$$

rr codant les deux jetons rouges ajoutés.

Inversement on pourra effectuer :

$$R > V - v$$

En fournissant deux collections inégales on peut demander à ce qu'elles deviennent égales. Deux solutions : on ajoute à la plus petite qu'il faudra donc commencer par reconnaître, ou on retranche à la plus grande. En plaçant les collections en correspondance terme à terme, la paresse conduit à enlever les jetons qui rendent une des deux collections plus grande que l'autre. On peut alors introduire le signe (-) qui code par écrit le geste de retrait (l'opération) :

$$R - r < V.$$

La mémoire kinesthésique gestuelle (enlever des objets), la mémoire visuelle (assurer visuellement la correspondance terme à terme), la mémoire auditive (dire ce qu'on réalise concrètement), la mémoire du codage (coder l'opération réalisée avec le signe -) vont s'appuyer pour parvenir à conceptualiser différence et soustraction (l'opération).

On verra qu'avec les réglettes la notion de différence émerge plus visiblement que celle de « soustraction ».

## **De l'action et du temps pour conceptualiser**

Conceptualiser est une œuvre de longue haleine. Il faut du temps et de nombreuses et de nombreuses manipulations et de nombreux codages écrits pour généraliser et conceptualiser. Les enfants devront donc travailler à chaque séance avec des matériels différents, puis chacun ou chaque groupe d'élèves avec des

objets différents. Et s'ils veulent personnaliser le codage, choisir le code représentant le matériel, il faut le favoriser, car le code doit être compris comme un support temporaire n'ayant aucune importance en soi, c'est une béquille mémorielle. Si on avait travaillé avec des ronds rouges et des carrés verts, les situations auraient pu être codées avec les codes :

C (carrés), R (ronds), + , - , = < , >...

Imaginons que nous passions à la comparaison avec une balance : on irait plus vite pour trouver où il y a le plus de jetons rouges, quitte à vérifier ensuite en réalisant une correspondance terme à terme. Notez déjà que la comparaison du poids de deux collections de réglettes rouges sera efficace pour trouver la plus grande. A cet âge-là on est un parfait incrédule, et seule la preuve, par mise en correspondance, assure la tranquillité et la mémorisation. Au passage mesurons combien cet aspect du développement (la confiance dans le résultat) sera mis à rude épreuve, comme en lecture lorsqu'il lira : « couvent et couvent, rien et nier, zen et nez ». Et cela l'accompagnera longtemps. Par exemple en arithmétique, trouvant les diviseurs de 12, il affirmera que ceux de 13 seront encore plus nombreux (je l'ai constaté en classe).

Je n'insiste pas sur les diverses opérations possibles utilisant les plateaux de la balance, ajouter et retrancher suivies de leur écriture, de leur codage. Mais la balance va pouvoir mettre à mal l'idée d'égalité des quantités par rapport au nombre et replacer l'enfant à nouveau dans le schéma piagétien pour mieux s'en détacher. Le déséquilibre entre 3 blocs logiques rectangles grands et minces et 3 rectangles grands et épais (on trouvera encore bien quelques blocs logiques Diénes dans le grenier de l'école, tout comme des réglettes Cuisenaire !) finira par distinguer la notion de quantité numérale de celle de poids (masse). On vérifie dans l'espace qu'il y a bien le même nombre de blocs alors que la balance indique « plus grand que » (en réalité « plus lourd que »). Espace et poids sont ainsi éliminés de la nébuleuse « nombre cardinal » dont le concept commence à se préciser mentalement. Je fais confiance aux pédagogues pour présenter de multiples situations alimentant la naissance du concept de nombre.

## Les ordinaux

Peut-être faudra-t-il éviter de parler simultanément des ordinaux qui concernent la place d'un objet par rapport à un autre dans une file orientée, cela viendra plus tard. Et ce dans le but de ne pas donner à confusion entre 9 et la place de 9 dans le nombre 129 : 9 est en troisième position alors qu'apparemment il est plus grand que 1 et 2...! On se retrouverait alors dans la même confusion qu'à l'écrit où certains enfants croient encore que « a » se décode /a/<sup>1</sup>.

La comparaison de longueurs permettra aussi de conforter les notions de plus grand, plus petit et égal. Le matériel Montessori, les propositions de Decroly, les réglettes Cuisenaire fourniront des matériels facilitant les manipulations.

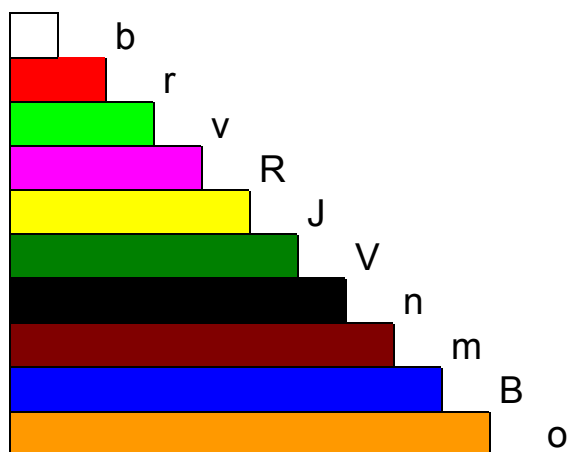
---

1 Si on le leur a enseigné, ils sont logiques... Alors que seulement 20% des « a » se décodent /a/ dans un texte. Pour une autre approche de l'apprentissage de la lecture, faisant place au codage, consulter le site « ecrilu »

Et ce sera l'occasion de mettre en œuvre les réglettes Cuisenaire<sup>1</sup>. Le génie du pédagogue belge réside dans le fait que les réglettes sont parfaitement homothétiques au système décimal<sup>2</sup> et que les longueurs<sup>3</sup> sont codées par des couleurs choisies pour repérer les doubles, les triples ou les nombres premiers. Cela va permettre de « mathématiser », de coder en maternelle sans avoir à utiliser les chiffres codant les nombres.

## Présentation des réglettes :

Le matériel est constitué de 10 réglettes de section carrée de 1cm<sup>2</sup>, et de longueurs allant de 1 à 10cm par itération de 1cm.



La couleur est un code pouvant être utilisé pour introduire la mathématique en maternelle. Couleur vue, couleur entendue, code utilisé, dimension tactiles vont s'appuyer lors des manipulations pour mieux cerner le codage des quantités.

L'égalité d'abord :



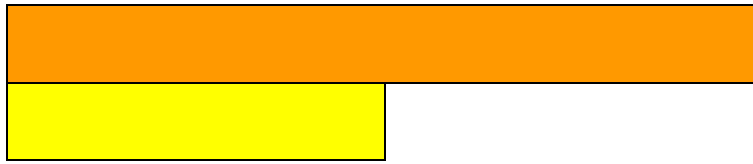
$o = o$  (o symbolise la longueur orange)  
ou  $j = j$  ;  $r = r$  etc.

<sup>1</sup> Si on range sur la table une blanche, une rouge et une bleue, on constate que la plus petite est 1ère !

<sup>2</sup> Mais on peut aussi compter en d'autres bases, et mieux comprendre la retenue par exemple...

<sup>3</sup> Les couleurs vont permettre justement de coder différentes quantités, les dizaines, les centaines, etc. La réglette rouge code donc suivant sa position, 2, 20, 200, 2000, etc.

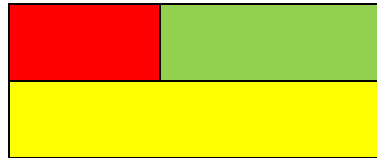
Les inégalités ensuite :



$o > j$  et  $j < o$  ci-dessus ;

Ou B (bleue)  $>$  v (vert clair) ; etc...  $v < B$  ;  $b < r$  ; etc.

L'addition :



$r + v = j$  ;

ou R (rose) + V (vert foncé) = o

La différence :



Une jaune est posée sur l'orange, on mesure la différence, la partie orange restant à vue, avec la règle soulignant ce reste, :  $O - j = j$  ;

Ou :  $B - j = R$  ;  $n - j = r$ ...etc.

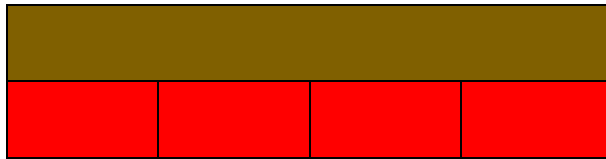
Le produit :



$r + r + r = 3r = V$  ;

ou :  $2j = o$  ;  $2v = V$  etc.

La division :



$$m / r = 4 \text{ (comptage des barres } r \text{)}$$

Produit et division seront utiles pour mieux introduire le nombre sans valeur matérielle, complétant l'accès au concept : voir 2 réglettes jaunes éгалer l'orange introduit le rapport 2 qui est une figure du nombre se dégageant du comptage et de la quantité. Sans rien dire explicitement pour l'instant, les structures de calcul vont s'installer mentalement, en jouant.

On peut parvenir ainsi à faire réaliser par des élèves de grande section ou de début de CP ce genre d'opération :

$$J + r + V - (b + R) = \dots ?$$

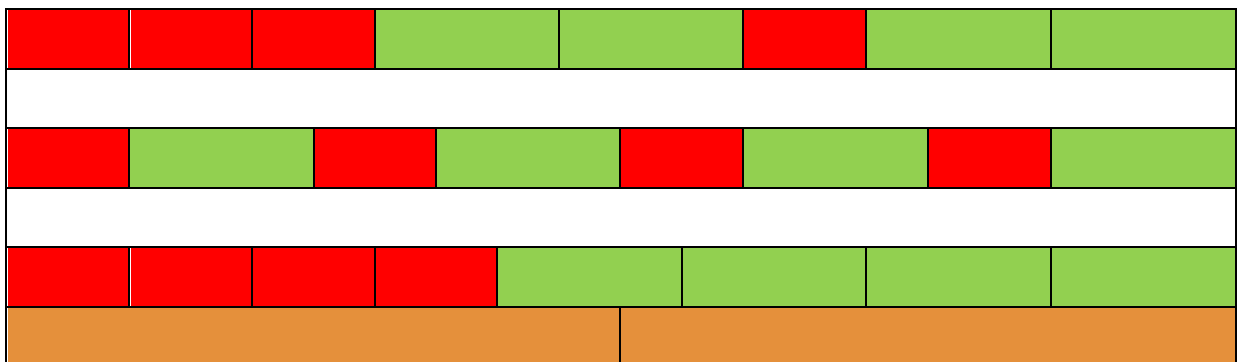
Et même, à faire mettre en facteur commun en proposant un train de réglettes :

$$r + r + r + v + v + r + v + v$$

que l'enfant restructure successivement en déplaçant les réglettes ( pour voir  $r + v$  ) :

$$r + v + r + v + r + v + r + v \text{ puis en } 4 ( r + v )$$

pour finir par constater la distributivité du produit :  $4r + 4v$  et le total : 2 o :



Et vous pouvez imaginer ce qu'il est possible de visualiser avec 3 réglettes combinées. 3 réglettes différentes pour chaque enfant, on ira voir les résultats sur chaque table : il y a toujours 6 combinaisons quelles que soient les réglettes utilisées. Comment être certain que toutes les combinaisons possibles sont là ? Comment trouver celle(s) qui manque(nt) ici ou là ?

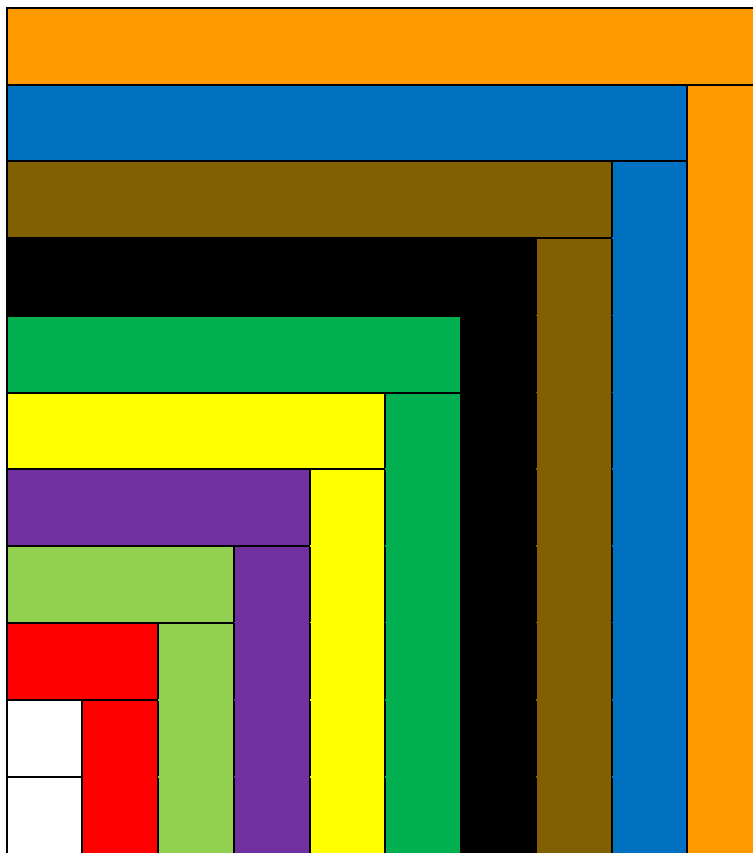
$$R + B + j$$

$$\begin{array}{l}
 R + j + B \\
 B + R + j \\
 B + j + R \\
 j + B + R \\
 j + R + B
 \end{array}$$

Plus tard, en offrant la possibilité de travailler mentalement avec le support de la couleur, les enfants parviennent facilement à connaître les sommes, différences et produits sans les apprendre systématiquement par cœur, en les plaçant directement en mémoire procédurale. Ils ont vite compris que si on sait 2 fois 2 on sait aussi ou on retrouve facilement 4 fois 2, 4 fois 4, 4 fois 8 et 8 fois 8 (si on double un des facteurs... etc.) et qu'on peut calculer 8 fois 12 sans savoir sa table de multiplication :

$$12 \times 8 = 24 \times 4 = 48 \times 2 = 96 \times 1$$

Pour prendre possession des réglettes visuellement, manuellement, sensiblement, il y aura une phase de jeu libre qui débutera cette aventure en mathématique. Voyez ci-dessous ce qu'avait réalisé une élève de CE2. En dépassant l'aspect pictural non négligeable, en y jetant un œil mathématique, on y trouve la formule permettant de calculer rapidement et facilement la somme de n premiers nombres...



En disposant des réglettes de deux couleurs (codées a et b) on démontrera et vérifiera visuellement (sans utiliser un seul nombre, directement en algèbre !) :



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \dots$$

Les élèves viennent d'entrer en mathématique. Il suffit d'exploiter les possibilités offertes par notre collègue Cuisenaire, d'ajouter aux couleurs le codage chiffré en codant chaque couleur-longueur avec les chiffres de notre système décimal. Au passage, pour ne pas l'oublier, signalons que C. Gattegno, friand de travail mental à partir de la visualisation (voir la lecture en couleurs) a su utiliser de manière magistrale cette découverte intuitive de Cuisenaire. Son Livre « Enfin Freddy comprend l'arithmétique »<sup>1</sup> (1962) vaut le détour.

Si vous ajoutez le côté tactile<sup>2</sup> (reconnaître une règle uniquement avec les doigts, sans le secours de la vue) ; et plus tard la conceptualisation du système de numération positionnelle en comptant et calculant dans différentes bases (une règle quelconque peut coder la base : si la rouge est prise comme base, on code en binaire...et  $11 + 1 = 100$ ) ; le calcul des surfaces du rectangle, du carré, et leurs périmètres, le calcul des volumes, les puissances, les fractions, sont à portée de manipulation et de codage mémorisé facilement grâce à la couleur. Les produits dispensent de l'apprentissage par cœur des tables de multiplication, tout en ayant accès à tous les résultats.

Pour ceux qui seraient intéressés par des développements plus fournis et par une progression plus complète, il suffit de me les demander : rendez-vous sur le site « ecrilu » et utilisez « contact ».

NB. Je n'ai aucun intérêt commercial dans cette publicité indirecte pour les règles Cuisenaire !

---

<sup>1</sup> Une formation aux règles est indispensable si on veut éviter l'abandon dont elles ont été victimes.

<sup>2</sup> Voir les travaux d'E. Gentaz